Massachusetts Teknoloji Enstitüsü-Fizik Bölümü

Fizik – 8.01 **Ödev # 6** **Güz, 1999**

ÇÖZÜMLER

Dru Renner dru@mit.edu

1 Kasım 1999 Saat: 10.14

Problem 6.1 (Ohanian, sayfa 291, problem 13)

Bu iki otomobilin kütleleri m_1=540kg ve m_2 =1400kg' dır ve onların hızları başlangıç istikametinde ölçüldüğünde m_1 için v_1=80 km/sa$\approx$22.22 m/s ve m_2 için v_2=- 80 km/sa $\approx$-22.22 m/s

a) Bize bu iki otomobilin çarpışmadan sonra birlikte hareket ettiği verilmiştir. Çarpışmadan sonra, iki otomobil bir otomobil gibi hareket etmekte ve bu nedenle onların her ikisinin hızı aynı olup bu hız aynı zamanda kütle merkezinin hızı (v_{CM}) olmalıdır. Hiçbir dış kuvvet yoktur. Bu nedenle, kütle merkezinin hızı çarpışma boyunca değişmeden (aynı) kalır.

Bundan dolayı

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{540 - 1400}{540 + 1400} \cdot 80 \mathrm{km/sa} \approx -35 \mathrm{km/sa} \approx -9.9 \mathrm{m/s}$$

Enkazın hızı v_{CM} ile verilir. Dikkat edin, eğer biz v_{CM} hızını km/sa biriminde istemiş olsaydık, bunu metrik olmayan birimden çevirmemiz gerek yoktu.

b) Çarpışmadan önceki toplam kinetik enerji:

$$K_{\text{önce}} = \frac{m_1 {v_1}^2}{2} + \frac{m_2 {v_2}^2}{2} = \frac{1}{2}(540)(22.22)^2 + \frac{1}{2}(1400)(22.22)^2 = 4.8 \,\mathrm{x}\, 10^5 \mathrm{J}$$

Çarpışmadan sonraki toplam kinetik enerji

$$K_{\text{sonra}} = \frac{(m_1 + m_2) v_{CM}^2}{2} = 8.2 \,\mathrm{x}\, 10^4 \mathrm{J}$$

dir. Sonucu J cinsinden elde etmek için km/sa' i m/s' ye çevirmek gerekli olduğuna dikkat edin.

c) Bu hesaplama kütle merkezi çerçevesinde en iyi yapılır: Hiçbir dış kuvvet olmadığı için, bu çerçeve eylemsizdir. Bu nedenle, bu çerçevedeki ivme, yere göre olan ivme ile aynıdır. Kinematik ilişkiyi kullanacağız:

$$a = \frac{v^2 - v_0^{\ 2}}{2(x - x_0)}$$

m_1 kütleli otomobil için, kütle merkezi çerçevesindeki hızı:

$$v_1^{'} = v_1 - v_{CM} = 22,2 - (-9,9) = 32,1 m/s$$

Yolcu bölümünün maruz kalacağı ivme:

$$a_1 = \frac{v_1^{'2}}{2d} \approx 8.6 \times 10^2 m/s^2$$

m_2 kütleli otomobil için, kütle merkezi çerçevesindeki hızı

$$v_2^{'} = v_2 - v_{CM} = -22,2 - (-9,9) = -12,3 m/s$$

Yolcu bölümünün maruz kalacağı ivme:

$$a_2 = \frac{v_2^{'2}}{2d} \approx 1,3 \times 10^2 m/s^2$$

Problem 6.2. (Ohanian, sayfa 292, problem 23)

Bu problem sayfa 292'de şekil 11.12 de verilmiştir. m her bir çelik topun kütlesi olsun. İlk çelik top sallanır ve ikinci çelik topla çarpışana kadar kinetik enerji kazanır. Başlangıçta ilk çelik top yatayla θ açsı yapar bir şekilde durmaktadır. Bu yüzden salıncağın en alt ucuna göre onun yüksekliği:

$$h = \ell(1 - \cos\theta)$$

İle verilir. Onun mekanik enerjisi:

$$E = mgh = mg\ell(1 - \cos\theta)$$

Şeklindedir. Salıncağın en alt kısmında, çarpışmadan biraz önce, mekanik enerjisi:

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

Mekanik enerjinin korunumu

$$mg\ell(1-\cos\theta)=\frac{mv^2}{2}\Rightarrow v=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

Verir. Ayrıca (h) cinsinden, mekanik enerjinin korunumu

$$mgh=\frac{mv^2}{2}\Rightarrow h=\frac{v^2}{2g}$$

İfadesini verir.

a) Çarpışmanın esnek olduğu verildiği için, kinetik enerjinin korunduğunu biliyoruz. Ayrıca momentumda korunur. İlk çelik topun çarpışmadan önceki hızını v_1 olarak alacak olursak ve çarpışmadan sonra, birinci ve ikinci çelik topların hızlarını sırasıyla v_1' ve v_2' olarak alırsak, bu durumda

$$\frac{mv_1^2}{2}=\frac{mv'^2_1}{2}+\frac{mv_2'^2}{2}$$

ve

$$mv_1=mv_1'+mv_2'$$

Bu eşitlikler bir boyutlu durumdaki eşitlikler ile tamamıyla aynıdır. Çözümler sayfa 277'deki eşitlik (11) ve (12) de verilmiştir.

$$v'_1=\frac{m-m}{m+m}\cdot v_1=0$$
$$v'_2=\frac{2m}{m+m}\cdot v_1=v_1$$

(İlk çelik top durduğu için) mekanik enerjinin tümü ikinci çelik topa aktarılır, böylece ikinci çelik top birincinin başlamış olduğu aynı yüksekliğe ulaşmalıdır.

$$h'=\frac{v'^2_2}{2g}=\frac{v_1^2}{2g}=h$$

b) Bizlere cam macunu toplarının çarpışmadan sonra birbirlerine yapıştığı verilmiştir. Eğer çarpışmadan sonra birbirine yapışan cam macunu toplarının hızını v_1' olarak alacak olursak, bu durumda momentumun korunumu

$$mv_1=2mv'\Rightarrow v'=\frac{v_1}{2}$$

$$h'=\frac{v'^2_2}{2g}=\frac{(\frac{v_1}{2})^2}{2g}=\frac{1}{4}\cdot\frac{v_1^2}{2g}=\frac{h}{4}$$

İfadelerini verir.

Problem 6.3

m_J=100 kg, m_N=80 kg ve m_B=10 kg olsun. John Nancy veya Bloğa etki eden dış kuvvetler yoktur. Böylece momentum korunur. Hız John'dan Nancy'ye doğru yönlendirildiğinde pozitif olarak düşünülecektir. Kinetik enerjinin korunmas gerekmediğine dikkat ediniz. John ve Nancy bloğu yakalayarak ve kaydırarak iç enerjiyi kinetik enerjiyle değiştirebilir.

a) v_{J1} John'un kızağının hızı ve v_{B1} John bloğu bıraktıktan sonra bloğun hızı olsun. John'un kızağına göre bloğun hızının 3 m/s olduğu veriliyor. Böylece

$$v_{B1} = v_{j1} + 3$$

Momentumun korunumu

$$0 = m_j v_{j1} + m_B v_{B1} = m_{j1} v_{j1} + m_B (v_{j1} + 3) \Rightarrow$$
$$v_{j1} = -\frac{3m_B}{m_J + m_B} \approx -0.27 m/s \Rightarrow$$
$$v_{B1} = v_{j1} + 3 = \frac{3m_j}{m_j + m_B} \approx 2,7 m/s$$

İfadesini verir.

b) V_{N1} Nnacy' nin bloğu yakaladıktan sonra, Nancy'nin kızağının hızı olsun. Momentumun korunumu

$$m_B v_{B1} = (m_B + m_N) v_{N1} \Rightarrow$$
$$v_{N1} = \frac{m_B}{m_B + m_N} \cdot v_{B1} = \frac{m_B}{m_B + m_N} \cdot \frac{3m_J}{m_j + m_b} \approx 0,30 m/s$$

İfadesini verir.

c) V_{N2} Nancy'nin kızağının hızı ve v_{B2} Nancy'nin bloğu John'a kaydırdıktan sonra, kızağın hızı olsun. Bloğun hızının Nancy'nin kızağının hızna göre 3 m/s olduğu veriliyor. Bu yüzden;

$$v_{B2} = v_{N2} - 3$$

Şeklindedir. (Burada "-3" ve yukarısı "+3" olduğuna dikkat edin. Bu bizim pozitif hız için yaptığımız seçimle ilgilidir.) Momentum korunumu

$$(m_B + m_N)v_{N1} = m_B v_{B2} + m_N v_{N2} = m_B(v_{N2} - 3) + m_N v_{N2} \Rightarrow$$
$$v_{N2} \frac{(m_B + m_N)v_{N1} + 3m_B}{m_B + m_N} \approx 0,63m/s \Rightarrow$$
$$v_{B2} = v_{N2} - 3 \approx -2,4m/s$$

Verir.

d) v_{J2} John'ın bloğu yakaladıktan sonra John'un kızağının hızı olsun. Momentum korunumu:

$$m_j v_{j1} + m_B v_{B2} = (m_j + m_B)v_{j2} \Rightarrow v_{j2} = \frac{m_j v_{j1} + m_B v_{B2}}{(m_J + m_B)} \approx -0,46m/s$$

Eşitliğini verir.

e) John'un bloğu serbest bıraktıktan sonra iki kızağın ve bloğun toplam kinetik enerjisi

$$K = \frac{m_j v_{j1}^2}{2} + \frac{m_B v_{B1}^2}{2} \approx 41J$$

Şeklindedir. Başlangıçta hiç kinetik enerji yoktu, fakat John bloğu Nancy'ye kaydırarak kimyasal enerjiyi (kaslarında depolanmış olan) kinetik enerjiye dönüştürür.

f) Nancy'nin bloğu henüz yakaladıktan hemen sonra, bloğun ve iki kızağın toplam kinetik enerjisi

$$K = \frac{m_j v_{j1}^2}{2} + \frac{(m_B + m_N)v_{N1}^2}{2} \approx 7,9J$$

Nancy bloğu yakaladığı zaman, işin içine karışan iç kuvvetler vardır. Bu kuvvetler kinetik enerjiyi diğer enerji formlarına dönüştürür.

g) Nancy bloğu serbest bıraktıktan hemen sonra, iki kızağın ve bloğun toplam kinetik enerjisi

$$K = \frac{m_j v_{j1}^2}{2} + \frac{m_B v_{B2}^2}{2} + \frac{m_N v_{N2}^2}{2} \approx 48J$$

Şeklindedir. Nancy, bloğu tekrar John'a geri kaydırarak kimyasal enerjiyi (kaslarında depolanmış olan) kinetik enerjiye dönüştürür.

h) John bloğu yakaladıktan sonra kızakların toplam kinetik enerjisi

$$K = \frac{(m_B + m_j)v_{j2}^2}{2} + \frac{m_N v_{N2}^2}{2} \approx 28J$$

Şeklindedir. John bloğu yakaladığı zamanı işin içine karışan iç kuvvetler vardır. Bu kuvvetler yine kinetik enerjiyi diğer enerji formlarına dönüştürür.

Problem 6.4

Kütle merkezi çerçevesi, kütle merkezinin içinde durgun olduğu çerçeve olarak tanımlanır. Bu yüzden iki buz hokeyi topu bu çerçeve içinde zıt yönlerde hareket etmelidir. Eğer v_1 ve v_2, sırasıyla m_1 ve m_2'nin hızları ise

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{m_2}{m_1} \cdot v_2 \text{ dir.}$$

Açıkça toplam momentum sıfırdır. Fakat kinetik enerji

$$K = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

İle verilir. Bizim kinetik enerji terimindeki v_1 hızını yok etmek daha kolaylık sağlayacaktır ve bunun için v_1 ve v_2 arasındaki ilişkiyi kullanacağız.

$$K = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2}{m_1} \cdot v_2\right)^2 + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2}\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)$$

a) Çarpışmanın esnek olduğu verilmiştir. Böylece kinetik enerji korunumludur. Ayrıca buz hokeyi topları üzerine etki eden dış kuvvetlerde yoktur. Böylece momentumda korunumludur. Eğer biz çarpışma sonrası hızları $\vec{v}_1^{\,'}$ ve $\vec{v}_2^{\,'}$ olarak alırsak, bu durumda momentumun korunumu

$$0 = m_1 \vec{v}_1^{\,'} + m_2 \vec{v}_2^{\,'} \Rightarrow \vec{v}_1^{\,'} = -\frac{m_2}{m_1} \cdot \vec{v}_2^{\,'} \Rightarrow \left|v_1^{'}\right| = \frac{m_2}{m_1} \cdot \left|v_2^{'}\right|$$

Eşitliğini verir. Bu yukarıdaki v_1 ve v_2 deki ile aynı ilişkidir. Bu yüzden kinetik enerji benzer olarak

$$K = \frac{m_1 \left|v_1^{'}\right|^2}{2} + \frac{m_2 \left|v_2^{'}\right|^2}{2} = \frac{m_2 \left|v_2^{'}\right|^2}{2}\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)$$

Şeklinde verilir. Bu durumda kinetik enerjinin korunumu

$$\frac{m_2 v_2^2}{2} \cdot \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) = \frac{m_2 \left|v_2^{'}\right|^2}{2} \cdot \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) \Rightarrow$$

$$\left|v_2^{'}\right| = v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{m_2}{m_1} \cdot v_2 = \frac{m_2}{m_1}\left|v_2^{'}\right| = \left|v_1^{'}\right|$$

Eşitliğini verir. Böylece sadece kinetik enerjinin korunumu ve momentumun korunumu kullanılarak genel sonuç

$$|v_2'| = v_2 \text{ ve } |v_1'| = v_1 \text{ ve } \vec{v_1'} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v_2'} \text{ dir.}$$

Şeklinde olur. Bu yönlerin tam olarak zıt olduğunu göstermektedir.

b) Yukarıdaki eşitliği karşılayan herhangi iki $\vec{v_1'}$ ve $\vec{v_2'}$ hız vektörleri aynı zamanda kinetik enerjinin ve momentumun korunumunu da sağlayacaktır. Eğer biz düzlemde bir birim vektörü $\hat{n}$ ile gösterirsek, bu durumda

$$v_1' = v_1\,\hat{n} \quad \text{ve} \quad v_2' = -\,v_2\,\hat{n}$$

tüm çözümlerdir. Bu yüzden hareketin herhangi bir yönü kinetik enerji ve momentum korunumuyla uyumludur.

c) Çarpışma öncesi kütle merkezi çerçevesinde toplam kinetik enerji yukarıda verilmiştir.

$$K = \frac{m_2 v_2^2}{2} \cdot \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)$$

d) Biz çarpışmanın esnek olduğunu varsaydık. Bu yüzden kinetik enerji korunmuştur. Bundan dolayı çarpışmadan sonra toplam kinetik enerji

$$K = \frac{m_2 |v_2'|}{2} \cdot \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) = \frac{m_2 v_2^2}{2} \cdot \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)$$

şeklinde verilir.

Problem 6.5

Basketbol topu yerden sıçrayana kadar basketbol ve tenis topu çarpışmaz. İki top da "h" olarak adlandırdığımız aynı uzaklığı düşer, bundan dolayı her ikisi de basketbol topu yere düşmeden hemen önce, aynı hıza sahiptir $v = \sqrt{2gh}$. Dünyanın kütlesiyle kıyaslandığında basketbol topunun kütlesi hiçbir şey değildir, bu yüzden, basket topu aynı v hızıyla geriye sıçrayacaktır. (Çarpışmanın esnek olduğunu varsayıyoruz, yani kinetik enerji korunur.)

Şimdi tenis ve basketbol topu çarpışıyor. Bu çarpışma basketbol topu ile beraber hareket eden çerçeveden en iyi şekilde görülür. Bu çerçevede tenis topu 2v hızında hareket eder ve durağan halde olan basketbol topuna çarpar. Basket topu tenis topundan oldukça ağırdır, bu yüzden tenis topu aynı 2v hızıyla geriye doğru sıçrayacaktır. (Yine çarpışmanın esnek olduğunu varsayıyoruz). Asıl çerçevede, tenis topu 2v+v=3v hızına sahiptir. Bundan dolayı, çıkacağı yükseklik $h' = \frac{(3v)^2}{2g} = 9\frac{v^2}{g} = 9h$ şeklinde olacaktır.

Problem 6.6

m=6kg, v=350m/s, $m_{1=}$2kg, v_1=250m/s, m_2=4kg, ve v_2=400m/s olsun.

a) Çarpışmadan önce toplam momentum:

$$P_{önce} = mv = 2.1\text{x}10^3 \text{ kg m/s}$$

Çarpışmadan sonra toplam momentum:

$$P_{sonra} = m_1v_1+m_2v_2 = 2.1\text{x}10^3 \text{ kg m/s}$$

Böylece $P_{önce}=P_{sonra}$ dır ve momentum korunur.

b) Çarpışmadan önce toplam kinetik enerji:

$$K_{önce} = \frac{mv^2}{2} \approx 3,68 \cdot 10^5\, j$$

Çarpışmadan sonra toplam kinetik enerji:

$$K_{sonra} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} \approx 3,83 \cdot 10^5\, j$$

Böylece $K_{önce} \neq K_{sonra}$, dır ve kinetik enerji korunmaz.

c) Çarpışmadan önce kütle merkezinin hızı:

$$V_{önce} = \frac{mv}{m} = v = 350m/s$$

Çarpışmadan sonra kütle merkezinin hızı:

$$V_{sonra} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = 350m/s$$

Böylece $v_{önce} = v_{sonra}$ dır ve kütle merkezinin hızı değişmez.

d) İlk olarak v, v_1 ve v_2 hızlarını uygun kütle merkezi hızlarına dönüştürmeliyiz.. v', v_1' ve v_2' uygun kütle merkezinde yukarıdaki hızlara karşılık gelem hızlar olsun.

$$v' = v - v_{önce} = v - v = 0$$

$$v_1' = v_1 - V_{SONRA} = 250 - 350 = -100m/s$$

$$v_2' = v_2 - V_{SONRA} = 400 - 350 = 50 m/s$$

Kütle merkezi çerçevesinde çarpışmadan önceki toplam momentum:

$$P_{ÖNCE} = mv' = 0$$

Kütle merkezi çerçevesinde çarpışmadan sonraki toplam momentum

$$P_{sonra} = m_1 v_1' + m_2 v_2' = 0$$

Böylece $P_{önce}$ = P_{sonra} dır ve kütle merkezi çerçevesinde momentum korunur. Kütle merkezi çerçevesinde çarpışmadan önceki toplam kinetik enerji:

$$K_{önce} = \frac{mv'^2}{2} = 0$$

Şeklindedir. Kütle merkezi çerçevesinde çarpışmadan sonraki toplam kinetik enerji:

$$K_{sonra} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = 1{,}5 \cdot 10^4\ j$$

Şeklindedir. Böylece $K_{önce} \neq K_{sonra}$ dır ve kinetik enerji kütle merkezi çerçevesinde korunmaz. Önceki sonuçların hiçbiri değişmez.

Problem 6.7

m_A=m ve m_B=3m olsun.

a) Masanın sürtünmesiz olduğu varsayılıyor, böylece diğer tek kuvvet korunumlu olan yay kuvvetidir. Böylece mekanik enerji korunur. (Yerçekimi ve normal kuvvet mevcuttur, fakat eğer masa düz ise bu durumda bu kuvvetler tam olarak dengelenir ve böylece önemli olmazlar.) Bundan dolayı, sistemin toplam mekanik enerjisi sabittir ve bu enerjiyi t=0 da hesaplayabiliriz. Ki bu zamanda her iki kütle de durgundur ve yay U_0 potansiyel enerjiye sahiptir.

$$E=U_0$$

b) Genelde, eğer K_A ve K_B, A kütlesi ve B kütlesinin kinetik enerjisi ve U_S yayın potansiyel enerjisi ise, bu durumda mekanik enerji:

$$E=K_A + K_B + U_S$$

Şeklindedir. Mekanik enerji korunumu

$$U_0 = K_A + K_B + U_S \quad \Rightarrow \quad U_S = U_0 - K_A - K_B$$

Eşitliğini verir.

c) Sistem üzerine etki eden hiçbir dış kuvvet yoktur, böylece momentum korunur. (Yine, yerçekimi ve normal kuvvet birbirini yok ettikleri için önemli değillerdir) Bundan dolayı, sistemin toplam momentumu sabittir ve bu momentumu t=0 da hesaplayabiliriz. Ki bu zamanda her iki kütle de durgundur.

P=0

Şimdi, belli bir zamanda hızlarının $\overrightarrow{v_A}$ ve $\overrightarrow{v_B}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$P = m_A\overrightarrow{v_A} + m_B\overrightarrow{v_B} = m\cdot\overrightarrow{v_A} + 3\cdot m\cdot\overrightarrow{v_B}$$

Momentumun korunumu

$$0 = m\cdot\overrightarrow{v_A} + 3\cdot m\cdot\overrightarrow{v_B} \Rightarrow \overrightarrow{v_B} = -\frac{1}{3}|v_A| \Rightarrow |v_B| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{v_A}|$$

Eşitliğini verir.

d) Yukarıdaki sonuçlar, parçacıkların her zaman zıt yönlerde hareket ettiklerini gösterir. Böylece, eğer A, +x yönünde hareket ediyorsa B, –x yönünde hareket eder.

e) Eğer sistemin kütle merkezi ile bizim koordinat sistemimizin merkezini aynı alırsak bu oldukça uygun olur. A ve B'nin kütlelerinin konumlarını sırasıyla x_A ve x_B olarak alalım. Bu durumda kütle merkezinin tanımından

$$0 = m_A x_A + m_B x_B = m\cdot x_A + 3m x_B \Rightarrow x_B = -\frac{1}{3}x_A$$

Bu durumda, A üzerine etkiyen kuvvet

$$m\ddot{x}_A = F = -k(x_A + x_B - \ell_0) = -k(x_A + \frac{1}{3}x_A - \ell_0) = -\frac{4k}{3}\cdot(x_A - \frac{3}{4}\ell_0)$$

Böylece hareket denklemi

$$\ddot{x}_A = -\frac{4k}{3m}\cdot(x_A - \frac{3}{4}\ell_0)$$

Bu hareketin

$$w_A = \sqrt{\frac{4k}{3m}}$$

Frekanslı bir basit harmonik hareket olduğunu gösterir. B içinde benzer bir ifade elde edilebilir.

$$3m\ddot{x}_B = F = -k(x_A + x_B - \ell_0) = -k(3x_B + x_B - \ell_0) = -4k\cdot(x_A - \ell_0) \quad \Rightarrow$$

$$w_B = \sqrt{4k \cdot \frac{1}{3m}} = \sqrt{\frac{4k}{3m}}$$

Böylece, yine x_B genlikli aşağıda verilen aynı ω frekanslı basit harmonik harekettir.

$$w_B = \sqrt{\frac{4k}{3m}}$$

Problem 6.8 (Ohanian, sayfa 294, problem 38)

İki boyutta çarpışmalar sayfa 281'de başlayan kesim 11.3 te anlatılmaktadır. Kinetik enerji ve momentumun korunumunu kullanarak konu ile ilgili sonuçlar:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1^{'} \cos\theta_1^{'} + m_2 v_2^{'} \cos\theta_2^{'}$$

$$0 = m_1 v_1^{'} \sin\theta_1^{'} - m_2 v_2^{'} \sin\theta_2^{'}$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1^{'2}}{2} + \frac{m_2 v_2^{'2}}{2}$$

Burada çeşitli nicelikler sayfa 281 deki Şekil 11.6 da gösterilmiştir. Bu problem için m_1=m_2=m dir ve m=1,673.10^{-27} kg değerinde olup protonun kütlesidir. Bu eşitliğin her iki tarafındaki kütleleri yok etmemize izin verir. Yukarıdaki eşitlikler

$$v_1 = v_1^{'} \cos\theta_1^{'} + v_2^{'} \cos\theta_2^{'} \qquad (2)$$

$$0 = v_1^{'} \sin\theta_1^{'} - v_2^{'} \sin\theta_2^{'} \qquad (3)$$

$$v_1^2 = v_1^{'2} + v_2^{'2} \qquad (4)$$

Şeklini alır. Bize başlangıçtaki proton için enerji verilmiştir ve bu v_1 bulmamıza müsaade eder ve şekilden $\theta_1^{'}$ ve $\theta_2^{'}$ açılarını ölçebiliriz. Böylece yukarıdaki eşitlikler giden her protonun enerjisini bulmamıza yarayacak olan $v_1^{'}$ ve $v_2^{'}$ hızlarını saptamamızda yeterli olacaktır. Yukarıdaki denklemi çözmek için eşitlik (2) yi $\sin\theta_2^{'}$'i ve eşitlik (3) ü $\cos\theta_2^{'}$ ile çarparız. Elde edilen eşitlikler,

$$\sin\theta_2^{'} v_1 = v_1^{'} \sin\theta_2^{'} \cos\theta_1^{'} + v_2^{'} \sin\theta_2^{'} \cos\theta_2^{'} \qquad (5)$$

$$0 = v_1^{'} \sin\theta_1^{'} \cos\theta_2^{'} - v_2^{'} \sin\theta_2^{'} \cos\theta_2^{'} \qquad (6)$$

Şeklinde olur. Eğer eşitlik (5) ve eşitlik (6)'yı toplarsak; bu durumda

$$\sin\theta_2^{'} v_1 = v_1^{'} (\sin\theta_2^{'} . \cos\theta_1^{'} + \sin\theta_2^{'} \cos\theta_2^{'})$$

elde ederiz. Bu bize v_1' için bir eşitlik verir.

$$v_1' = \frac{\sin\theta_2'}{\sin\theta_2' \cos\theta_1' + \sin\theta_1' \cos\theta_2'} \cdot v_1$$

Biz şekilden açıları ölçebiliriz. $\overline{PB}$ ile $\overline{AB}$ arasındaki açı θ_1' dür ve değeri yaklaşık $45^{0'}$dir ve $\overline{PC}$ ile $\overline{AP}$ arasındaki açı θ_2' dür ve değeri yaklaşık 44^0 dir. Bu değerler bize

$$v_1' \approx 0,695.v_1$$

Olduğunu verir. Eşitlik (4) ü kullanarak

$$v_1^{\,2} = v_1'^{\,2} + v_2'^{\,2} \;\Rightarrow\; v_2' = \sqrt{v_1^{\,2} - v_2'^{\,2}} \approx 0.719\ v_1$$

Elde edilir.

Başlangıçta $\overline{AP}$ boyunca hareket eden proton için enerji

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} = 8,0\times10^{-13}\,J$$

$\overline{PB}$ boyunca hareket eden proton için enerji

$$E_1' = \frac{mv_1'^2}{2} = (0,695)^2\,\frac{mv_1^2}{2} = 0,483.E_1 \approx 3,9.10^{-13}\,J$$

$\overline{PC}$ boyunca hareket eden proton için enerji

$$E_2' = \frac{mv_2'^2}{2} = (0,719)^2\,\frac{mv_1^2}{2} = 0,516.E_1 \approx 4,1.10^{-13}\,J$$

Şeklindedir.

Problem 6.9

Başlangıçtaki ilk hız ve kütleyi (v_i ve M_i) egzoz gazının hızı (u_{ex}) verildiğinde daha sonraki bir zamandaki hız ve kütleyle (v_f ve M_f) ilişkilendirilen sayfa 263'deki eşitlik (51) i kullanabiliriz.

$$v_f - v_i = u_{ex}\ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

$v_i = 8 \times 10^3$ m/s, $v_f = 8.5 \times 10^3$ m/s ve $u_{ex} = 2.5 \times 10^3$ m/s olarak verildiğini biliyoruz. Eğer uzay mekiğinin yakıtının tümünü kullandığını varsayarsak, Bu durumda M_f = 10^5 kg ve M_i= M_F + M_f dir. Burada M_F yakıtın kütlesidir. Yukarıdaki eşitlikten M_F yi aşağıdaki sırayı takip ederek çözebiliriz.

$$v_f - v_i = u_{ex} \ln(\frac{M_F + M_f}{M_f})$$

$$\frac{v_f - v_i}{u_{ex}} = \ln(\frac{M_F + M_f}{M_f})$$

$$e^{\frac{v_f - v_i}{u_{ex}}} = (\frac{M_F + M_f}{M_f})$$

$$M_F = M_f\, e^{\frac{v_f - v_i}{u_{ex}}} - M_f \approx 2.2\,x10^4\ \text{kg}$$

Problem 6.10

Roket hareketi, ders notları "Roket Denklemleri– 20/10/99 tarihinde 8.01 dersinin ana sayfasında tartışılmıştır.

a) Eğer egzoz hızı u_{ex} ve yanma oranı R ise, bu durumda F_{th} itmesi

$$F_{th} = u_{ex} R \Rightarrow u_{ex} = \frac{F_{th}}{R}$$

İle verilir.

F_{th} = 34x10^6 N ve R= 13.8x10^3 kg/s olduğunu biliyoruz. Böylece, egzoz hızı:

$$u_{ex} = \frac{F_{th}}{R} = \frac{34\,x10^6}{13.8\,x10^3} \approx 2.5\,x10^3\ \text{m/s}$$

b) Hiç yakıt kalmayıncaya kadar motorlar çalışacaktır. Eğer roketin ve yakıtın başlangıç kütlesi M_i=2.85 x 10^6 kg ve roketin son kütlesi (yakıtsız) M_f = 0.77 x 10^6 kg ise, bu durumda, yakıtın kütlesi M_F,

$$M_F = M_i - M_f = 2{,}85.10^6 - 0{,}77.10^6 = 2{,}08.10^6 kg$$

Şeklindedir. Eğer yanma oranı sabitse, yanma süresi:

$$R = \frac{M_F}{T} \Rightarrow T = \frac{M_F}{R} = \frac{2{,}08.10^6}{13{,}8.10^3} \approx 151 s$$

c) Roketin kuvvet denklemi

$$M(t).a = F_{th} - M(t).g \Rightarrow a = \frac{F_{th}}{M(t)} - g$$

İle verilir. Burada M(t), t zamanında roketin ve içindeki yakıtın kütlesidir. Başlangıç kütlesi $M(0)=M_i$'dir. Böylece başlangıç ivmesi

$$a=\frac{F_{th}}{M_i}-g=\frac{34.10^6}{2,85.10^6}-10\approx 1,9m/s^2$$

şeklindedir

d) Son kütle $M(T)=M_f$, böylece motor durmadan hemen önceki ivme

$$a=\frac{F_{th}}{M_f}-g=\frac{34.10^6}{0,77.10^6}-g\approx 34m/s^2$$

Şeklindedir.

e) Yukarıdaki diferansiyel denklemin çözümü

$$v_f=-u\ln\left(\frac{M_f}{M_i}\right)-gt$$

$t=T=\frac{M_F}{R}, RT=M_F$ zamanında ve $M_i-M_F=M_f$ oluğu zaman,

$$v_f=-2,5.10^3.\ln\left(\frac{0,77.10^6}{2,85.10^6}\right)-10.151\approx 1,8.10^3m/s$$

dir.

<u>Problem 6.11</u> (Ohanian, sayfa 271, problem 54)

Reaksiyon ürününün 4.4 kg'lık bir kütleye sahip olduğu ve bu ürünlerin 4.2 x 10^7 joule bir kinetik enerjiye sahip olduğunu biliyoruz. Eğer bu kütlenin hızı u ise, bu durumda

$$\frac{4,4.u^2}{2}=4,2.10^7\Rightarrow u=4,4.10^3m/s$$

Olarak elde edilir.